Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ставропольский государственный аграрный университет»

Кафедра «Математика»

МАТЕМАТИКА:
часть 1
Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Учебное пособие

Ставрополь 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Векторы и линейные пространства

1.1.1. Линейное (векторное) пространство

***Линейным (векторным) пространством* L** называется множество элементов (векторов), если:

— задан закон (операция сложения), по которому любым двум элементам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ из L сопоставляется элемент, также принадлежащий L, который называется их суммой и обозначается $\overline{a}+\overline{b}$;

— задан закон (операция умножения на число), по которому любому элементу $\overline{a}$ из L и числу α сопоставляется элемент из L, называемый произведением $\overline{a}$ на α и обозначаемый $\alpha\overline{a}$;

— указанные операции для любых элементов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ из L и любых чисел α,β удовлетворяют следующим 8-ми аксиомам (свойствам):

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - коммутативность сложения;

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ - ассоциативность сложения;

3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ - наличие нулевого элемента; (1)

4) $\vec{a}+(-\vec{a}) = \vec{0}$ - наличие противоположного элемента;

5) $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ – ассоциативность умножения на число;

6) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ -дистрибутивность относительно векторов;

7) $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ - дистрибутивность относительно чисел;

8) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

Множество ***L'*** векторов в линейном пространстве ***L*** называется ***линейным подпространством***, если

— сумма любых векторов из ***L'*** также принадлежит ***L'***;

— произведение каждого вектора из ***L'*** на любое число, также принадлежит ***L'***.

1.1.2. Линейная комбинация и оболочка векторов

Вектор $\vec{a}$ называется ***линейной комбинацией векторов*** $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$, если он является их взвешенной суммой вида

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k. \qquad (2)$$

Числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k$, входящие в линейную комбинацию, называются ее коэффициентами.

Пусть задана система векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_k$. Множество всех линейных комбинаций этих векторов называется ***линейной оболочкой этих векторов*** и обозначается $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_k)$. Линейная оболочка любой системы векторов из любого линейного пространства является линейным подпространством.

1.1.3. Линейная зависимость векторов

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ...\vec{a}_k$ называются ***линейно зависимыми*** если найдутся такие числа $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_k$ не все равные нулю, что выполняется равенство

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_k\vec{a}_k = 0 \quad (3)$$

Если же равенство (3) выполняется только когда все коэффициенты нулевые $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$, то ***векторы линейно независимы***.

1.1.4. Базис и размерность пространства

Базисом в пространстве называется любая упорядоченная система векторов, называемых базисными, если она удовлетворяет двум требованиям:

— все векторы этой системы являются линейно независимыми;
— любой вектор рассматриваемого пространства представляется линейной комбинацией этих базисных векторов.

Размерностью пространства *L* называется количество его базисных векторов и обозначается *dim(L).*

В обычном геометрическом пространстве можно выделить

нулевое или нульмерное линейное пространство L_0, состоящее только из одного нулевого вектора;

одномерное (двумерное) линейное пространство L_1 (L_2), состоящее из всех геометрических векторов, параллельных данной прямой (плоскости);

трехмерное линейное пространство L_3, состоящее из всех векторов геометрического пространства.

Нулевое пространство L_0 является подпространством для L_1, L_2 и L_3, а линейные пространства L_0, L_1 и L_2 являются подпространствами для трехмерного линейное пространства L_3.

1.1.5. Алгебраический вектор и арифметическое пространство

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ - базис в геометрическом пространстве, и вектор $\vec{a}$ раскладывается в линейную комбинацию базисных векторов

$$\vec{a} = \alpha\overrightarrow{e_1} + \beta\overrightarrow{e_2} + \gamma\overrightarrow{e_3},$$

то числа α, β и γ - называются ***компонентами или координатами вектора*** $\vec{a}$ в этом базисе.

Алгебраический вектор – упорядоченная совокупность чисел – координат вектора.

Алгебраические векторы (координаты) записываются в столбец или в строку, и образуют так называемые вектор-столбец или вектор-строку соответственно

$$b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}; \quad a=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}; \quad c=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Чтобы подчеркнуть различие между геометрическими и алгебраическими векторами над буквенными обозначениями последних не будем ставить стрелочки.

Множество всех n-мерных алгебраических векторов – упорядоченных наборов чисел – образует ***n*-мерное арифметическое пространство** R^n.

1.1.6. Линейные операции над алгебраическими векторами

При умножении алгебраического вектора на число все его компоненты умножаются на это число,

$$\lambda a=\begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta & \lambda\gamma \end{pmatrix}; \tag{5}$$

При сложении алгебраических векторов складываются их соответствующие координаты

$$a=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix};\ a\pm b=\begin{pmatrix} \alpha_1\pm\beta_1 & \alpha_2\pm\beta_2 & \alpha_3\pm\beta_3 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Множество всех алгебраических векторов одинаковой размерности – *арифметическое пространство* R^n*, является линейным пространством* L_n.

1.2. Задачи

1 По сторонам ОА и ОВ прямоугольника ОАСВ отложены единичные векторы **i** и **j** (рис.1). Выразить через **i** и **j** векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BA}$, если $OA=3$ и $OB=4$.

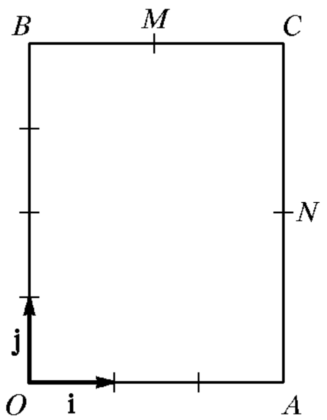

Рисунок 1

2 Даны векторы a и b, угол между которыми 120°. Построить вектор $c=2a-1{,}5b$ и определить его модуль, если a=3 и b=4.

3 Точка В делит дугу окружности $AC = 90°$ в отношении 1:2. О – центр окружности. Разложить вектор $\overrightarrow{OC} = c$ по векторам $\overrightarrow{OA} = a$ и $\overrightarrow{OB} = b$.

1.3. Системы координат

Для математического описания взаимного расположения точек в геометрическом пространстве используются системы координат (СК).

1.3.1. Декартовая система координат

Аффинная система координат (от лат. Affinitas – родство) представляет собой совокупность точки О – начала координат, и базиса - $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)$. Среди аффинных систем координат наиболее распространенными являются ***декартовые прямоугольные.*** В этом случае базисные векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Они называются *ортами* и обычно обозначаются $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Геометрическому радиус-вектору $\overrightarrow{OM}$, как линейной комбинации базисных векторов, в данном базисе соответствует алгебраический вектор ОМ – координатный столбец

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}; \quad OM = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}. \qquad (7)$$

1.3.2. Полярная система координат

На плоскости часто употребляется полярная система координат. Она определена, если задана точка О, называемая *полюсом*, и исходящий из полюса луч l, который называется *полярной осью*. Положение точки М однозначно определяется двумя числами: радиусом $r = \left|\overrightarrow{OM}\right|$ и углом (φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$. Этот угол называется *полярным углом*.

Он измеряется в радианах или градусах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. У полюса $r = 0$, а φ не определен. У остальных точек $r > 0$, а φ определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π.

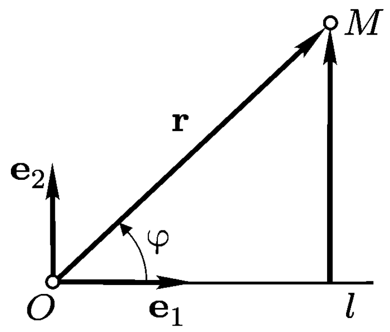

Рисунок – Взаимосвязь декартовой и полярной систем координат

Установим связь между полярной и декартовой прямоугольной системами координат, поместив начало декартовой прямоугольной системы в полюс, а полярную ось направив вдоль положительного направления оси абсцисс.

Тогда координаты произвольной точки в двух различных системах координат связываются соотношениями:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi; \qquad (8)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = arctg\frac{y}{x}. \qquad (9)$$

Пример. Дана точка $M(-1;-\sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки *M*.

Решение: Находим r и φ:

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \qquad tg\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

Отсюда $\varphi=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\epsilon Z$. Но так как точка *M* лежит в 3-й четверти, то $n=-1$ и $\varphi=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$. Итак, полярные координаты точки *M* есть *r* = 2, $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$, т.е. $M\left(2;\frac{-2\pi}{3}\right)$.

1.3.3. Основные приложения метода координат на плоскости

Координаты свободного вектора.

Пусть в геометрическом пространстве определены координаты точек $A(x_a, y_a, z_a)$ и $B(x_b, y_b, z_b)$, т.е. определены координаты их радиус-векторов $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$. Тогда для вектора $\overrightarrow{AB}$ из векторного равенства имеем:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_a-x_b\\ y_a-y_b\\ z_a-z_b\end{pmatrix};\quad AB=\begin{pmatrix}x_a-x_b\\ y_a-y_b\\ z_a-z_b\end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Таким образом, координатный столбец произвольного вектора АВ представляет собой разность координат конца и начала этого вектора.

Расстояние между двумя точками

Требуется найти расстояние *d* между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ плоскости *Oxy*.

Решение: Искомое расстояние *d* равно длине вектора

$$\overline{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1),\text{ т. е. } d=|\overline{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Деление отрезка в данном отношении

Требуется разделить отрезок *AB*, соединяющий точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda>0$, т. е. найти координаты точки $M(x;y)$ отрезка *AB* такой, что $\frac{AM}{MB}=\lambda$ (см. рис. 5).

Решение: Введем в рассмотрение векторы $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Точка *M* делит отрезок *AB* в отношении λ, если

$$\overline{AM}=\lambda\cdot\overline{MB}. \qquad (11)$$

Но $\overline{AM}=(x-x_1;y-y_1)$, т. е. $\overline{AM}=(x-x_1)\bar{i}+(y-y_1)\bar{j}$ и $\overline{MB}=(x_2-x;y_2-y)$, т.е. $\overline{MB}=(x_2-x)\bar{i}+(y_2-y)\bar{j}$ Уравнение (11) принимает вид

$$\left(x-x_1\right)\bar{i}+\left(y-y_1\right)\bar{j}=\lambda\left(\left(x_2-x\right)\bar{i}+\left(y_2-y\right)\bar{j}\right)$$

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем

$$x-x_1=\lambda x_2-\lambda x, \text{ откуда } x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \tag{12}$$

$$y-y_1=\lambda y_2-\lambda y, \text{ откуда } y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \tag{13}$$

Формулы (12) и (13) называются *формулами деления отрезка в данном отношении*. В частности, при $\lambda=1$, т. е. если *AM* =*MB*, то они примут вид $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, y=$\frac{y_1+y_2}{2}$. В этом случае точка *M(x;y)* является *серединой отрезка AB*.

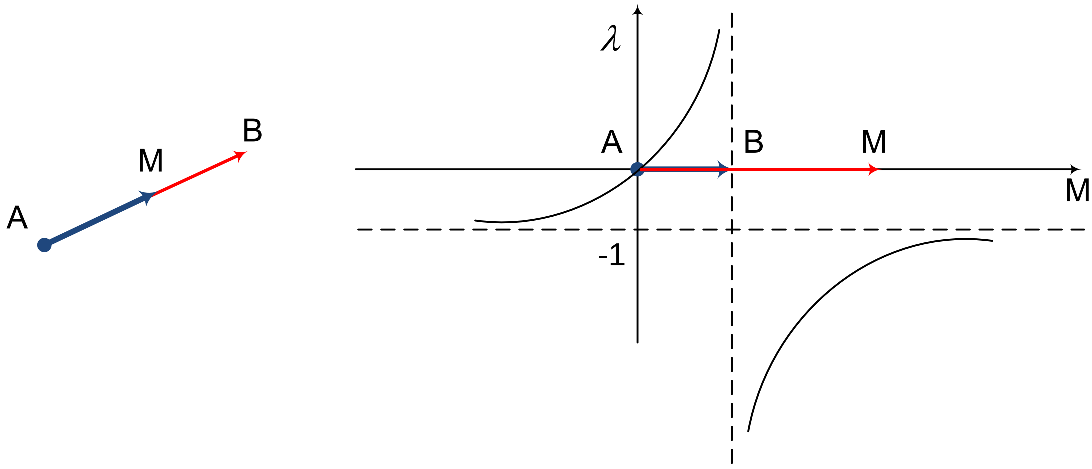

Рисунок 2.

Замечание: Если $\lambda=0$, то это означает, что точки *A* и *M* совпадают, если $\lambda<0$, то точка *M* лежит вне отрезка *AB* - говорят, что точка *M* делит отрезок *AB* внешним образом (см. рис.2).

1.4. Задачи

1. Проверить, что векторы a(-5,-1) и b(-1,3) образуют базис на плоскости. Найти координаты векторов c(-1,2) и d(2, -6) в этом базисе.

2. Даны три вектора a(1,3), b(2,-1), c(-4,1). Найти числа α,β,γ такие, что $\alpha a+\beta b+\gamma c=0$.

3. Найти точку, удаленную на 5 единиц как от точки A(2; 1), так и от оси Oy.

4. Построить линии в полярной системе координат:
а) $r=a$; б) $\varphi=\pi/4$;

$r=a\varphi$ (архимедова спираль);

$r=a(1-\cos\varphi)$ (кардиоида);

$$r = b/\sin\varphi;$$

$$r = a \cdot Sin2\varphi;$$

$$r = a \cdot Sin3\varphi.$$

5. Построить точки A(-2; 1) и B(3; 6) и найти точку M(x; y), делящую AB в отношении AM:MB = 3:2.

6. По условию предыдущей задачи разделить отрезок AB в отношении AM:MB = -3:2.

7. Определить середины сторон треугольника с вершинами A(2;-1), B(4;3) и C(-2;1).

2. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Действия над матрицами

Матрицу A^T называют ***транспонированной*** по отношению к матрице *A*, а переход от *A* к A^T ***транспонированием***, если элементы каждой строки матрицы *A* записать в том же порядке как столбцы матрицы A^T, другими словами, $a_{ij}^T = a_{ji}$, $i = \{1, 2, ...m\}$, $j = \{1, 2, ...n\}$, в частности для векторов

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}; \qquad b = a^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами – сложение матриц и умножение матрицы на число выполняются по аналогии с соответствующими операциями над алгебраическими векторами.

Сложение (вычитание) матриц определено только для матриц одинаковых размерностей.

Матрица $C_{m\times n} = A_{m\times n} + B_{m\times n}$ является **суммой** матриц A и B, если ее элементы представляют собой сумму соответствующих элементов исходных матриц:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\ i = \{1, 2, ...m\},\ j = \{1, 2, ...n\}.$$

Умножением матрицы *A* на произвольное число α называется матрица *B* той же размерности, что и *A*, все элементы которой умножаются на это число

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij},\ i = \{1, 2, ...m\},\ j = \{1, 2, ...n\}.$$

Матрицы и линейные операции над ними удовлетворяют аксиомам линейного пространства, в частности:

$$A + B = B + A; \quad (C + A) + B = C + (A + B). \tag{14}$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A; \quad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A). \tag{15}$$

Поэтому множество всех матриц одинаковой размерности mxn образуют линейное пространство размерности mn. Например, любую квадратную матрицу второго порядка можно разложить в линейную комбинацию 4-х базисных матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица $C_{m\times n} = A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ является ***произведением матриц*** *A* и *B*, если ее элементы вычислены по формуле «строка на столбец»:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}\,. \qquad (16)$$

Операция умножения матриц определена только для согласованных матриц, число столбцов первой из которых равно числу строк второй.

Свойства операции умножения матриц.

1)Умножение матриц ***не коммутативно***

$$AB \neq BA. \qquad (17)$$

Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB = BA$ выполняется, то такие матрицы называются *перестановочными.*

2) Умножение матриц ассоциативно и дистрибутивно:

$$(AB)C=A(BC); \quad (A + B)C = AC + BC; \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

3) Если определено произведение AB, то определено произведение B^TA^T и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^TA^T.$$

Пример 1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha=2$.

Найти $A^TB+\alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^TB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \qquad A^TB+\alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2 & 1\cdot4 & 1\cdot1 \\ 4\cdot2 & 4\cdot4 & 4\cdot1 \\ 3\cdot2 & 3\cdot4 & 3\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

2.2. Определитель матрицы

Определитель второго порядка.

$$\det(A_{2\times 2}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (18)$$

Определитель третьего порядка

$$\det(A_{3\times 3}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (19)$$

Для запоминания формулы гораздо удобнее правило Саррюса или треугольников. Берутся произведения элементов, соединенных линиями со знаком «+» (слева) и со знаком «-» (справа):

Свойства определителей

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот: $\det(A) = \det(A^T)$,

Поэтому, в дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя.*

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный, например

Следствие: определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 3. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Следствие: если определитель содержит нулевой ряд, то он равен нулю.

Замечание. При умножении матрицы на число все ее элементы умножаются на это число, поэтому: $\det(\alpha A_{n\times n}) = \alpha^n \det(A_{n\times n})$.

Свойство 4. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей, например, по первой строке

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 3\end{vmatrix}=2+8=10; \qquad (20)$$

Свойство 5 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число, например

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}+k\cdot a_{12}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+k\cdot a_{22}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+k\cdot a_{32}\end{vmatrix}.$$

Следствие: если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Свойство 6 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов определенного ряда на соответствующие им алгебраические дополнения

$$\det(A)=\Delta A=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(-1)^{i+k}M_{ik}\ . \qquad (21)$$

Введем понятия минора и алгебраического дополнения.

Минором M_{ij} некоторого элемента a_{ij} определителя *n-го* порядка называется подопределитель (*n-1)-го* порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Так, если

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ \text{то}\quad M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ M_{32}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}. \qquad \text{Например,}\quad A_{11}=M_{11};\ A_{32}=-M_{32}. \qquad (22)$$

Таким образом, свойство 6 позволяет представить определитель *n*-го порядка в виде суммы *n* определителей (*n-1*)-го порядков.

Пример. Вычислите определитель матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot\left(7\cdot 3\cdot 4 + (-1)\cdot 0\cdot 2 + 5\cdot 7 - (-1)\cdot 3\cdot 1 - 7\cdot 7\cdot 2 - 5\cdot 0\cdot 4\right) +$$
$$+\left(5\cdot 3\cdot 4 + (-1)\cdot 7\cdot 2 + 5\cdot 7\cdot 8 - (-1)\cdot 3\cdot 8 - 5\cdot 7\cdot 4 - 5\cdot 7\cdot 2\right) -$$
$$-\left(5\cdot 0\cdot 2 + 7\cdot 1\cdot 5 + 7\cdot 3\cdot 8 - 5\cdot 0\cdot 8 - 3\cdot 1\cdot 5 - 7\cdot 7\cdot 2\right) = 122.$$

Следствие: определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Свойство 7. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю. Так, например,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

Свойство 8. $det(AB) = det(A)\cdot det(B)$.

Свойство 9. Если в матрице А строки или столбцы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.

2.3. Ранг матрицы

Ранг матрицы – это число линейно независимых столбцов (строк) этой матрицы.

Это означает, что определитель, построенный на этих столбцах (строках) должен быть ненулевым. Поэтому ***ранг матрицы*** – это максимальный из порядков ненулевых миноров, порожденных этой матрицей.

Минором M_S *порядка s* матрицы называется определитель, образованный из элементов этой матрицы, находящихся на пересечении каких - либо выбранных ***s*** строк и ***s*** столбцов.

В матрице размерности $m \times n$ минор порядка r называется **базисным**, если он не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, или не существуют вовсе, например

$$rank\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 2, \text{ т.к. } M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ а } M_3 \text{ не существует.}$$

Таким образом, ***r*** не может превышать наименьшее из чисел m или n

$$rank\left(A_{m\times n}\right) \leq \min\left(m,n\right). \tag{23}$$

Столбцы и строки матрицы, на которых стоит базисный минор, также называются *базисными.*

В матрице может быть несколько различных базисных миноров, имеющих одинаковый порядок.

Порядок базисного минора матрицы и есть ранг этой матрицы. Ранг вычисляется или *методом окаймляющих миноров*, или *элементарными преобразованиями рядов матрицы*.

Для определения ранга матрицы используют так называемые *элементарные преобразования* строк или столбцов, которые здесь будем называть рядами матрицы.

Элементарные преобразования матрицы, сохраняющие ее ранг:

1) умножение (деление) ряда на число, отличное от нуля;

2) прибавление к элементам одного ряда соответствующих элементов другого ряда, умноженных на произвольное число;

3) перестановка рядов;

4) вычеркивание (удаление) нулевых рядов;

5) транспонирование.

Пример: Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0 \Rightarrow r = 2.$$

2.4. Задачи

1. Найти матрицу X если:

а) $2\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + X = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 8 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$; б) $3X + \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

2. Известно, что а) $A_{5\times 9}B_{m\times n} = C_{5\times 1}$; б) $A_{5\times m}B_{7\times n} = C_{5\times 6}$ Найти m и n.

3. Даны матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Найти произведение *AB, BA, AC*.

4. Вычислить определители

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$

$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 7 \\ -3 & 5 & 8 \end{vmatrix} =$$

5. Найти все значения α, при которых определители равны нулю:

а) $\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 7 & \alpha \\ \alpha & 0 & 2\alpha^2 \end{vmatrix}$

6. Разложить определитель по 1 столбцу:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

7. Вычислить при помощи элементарных преобразований и свойств определителей:

$$\begin{vmatrix} 4 & 13 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 8 & 26 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & -5 & 6 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & -34 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

8. Вычислить $\det(\alpha A)$, если известно, что $\alpha = 2$ и $\det A_{3\times 3} = 3$.

9. Найти ранг r матриц:

$$r\begin{pmatrix} 1 & -17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & -34 & 4 & 10 \\ 5 & 8 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix} 4 & 13 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \\ 8 & 26 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Матричный метод решения СЛАУ. Обратная матрица

Пусть матрица системы является квадратной (число уравнений равно числу неизвестных $m=n$) и невырожденной ($\det(A) \neq 0$).

В этом случае матричные уравнения имеют и притом единственные решения:

$$\begin{aligned} A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1}B \\ X \cdot A = B \rightarrow X = BA^{-1} \end{aligned}. \qquad (24)$$

Матрица A^{-1} называется ***обратной*** для матрицы A, если она удовлетворяет выражениям:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \qquad (25)$$

Заметим, что только квадратные, невырожденные ($\det(A) \neq 0$) матрицы имеют обратную матрицу и притом только одну.

Вычисление обратной матрицы через присоединенную:

1) Вычислить определитель матрицы. Если $\Delta = 0$, обратной матрицы не существует.
2) Найти алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ всех элементов матрицы.
3) Составить матрицу $\tilde{A}$ из этих алгебраических дополнений.
4) Транспонируя полученную матрицу получить присоединенную $\tilde{A}^T$.
5) Разделить присоединенную матрицу на величину определителя Δ.
6) Сделать проверку: $A \cdot A^{-1} = E$.

Таким образом, обратная матрица определяется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}^T, \quad \text{при} \quad \det(A) \neq 0. \qquad (26)$$

Пример 1:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} - ?$$

1) $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4-9) + 1(2 - 12) - 1(3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30.$

- обратная матрица существует.

2) Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы:

$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$ $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1;$ $\quad A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$

$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$

$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -19; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$

3) Составим матрицу из алгебраических дополнений:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -5 \\ -1 & 14 & -19 \\ -1 & -16 & 11 \end{pmatrix}$$

4) Транспонируем полученную матрицу и получим присоединенную:

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix};$$

5) Получим A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}^T = \frac{1}{-30}\begin{pmatrix} -5 & -1 & -1 \\ 10 & 14 & -16 \\ -5 & -19 & 11 \end{pmatrix} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -10 & -14 & 16 \\ 5 & 19 & -11 \end{pmatrix}$$

6) Сделаем проверку:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -10 & -14 & 16 \\ 5 & 19 & -11 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 25+10-5 & 5+14-19 & 5-16+11 \\ 5-20+15 & 1-28+57 & 1+32-33 \\ 20-30+10 & 4-42+38 & 4+48-22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Вычисление обратной матрицы элементарными преобразованиями:

1) Составить блочную матрицу вида $\left(A|E\right)$.

2) Путем элементарных преобразований строк привести левую часть блочной матрицы к единичной матрице. Тогда в правой ее части получим искомую обратную $\left(E\middle|A^{-1}\right)$.

К элементарным преобразованиям в данном случае относятся:

— умножение всех элементов строки на постоянное число не равное нулю;

— прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на любое число.

Пример 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}. \quad A^{-1}-?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 8 & 0 & 1\end{array}\right)_{-3\cdot(1c)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)_{\div 2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2\end{array}\right)^{-2\cdot(2c)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -3/2 & 1/2\end{array}\right).$$

$A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}.$ Проверка: $A^{-1}A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -1{,}5 & 0{,}5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

Свойства обратных матриц:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A; \quad \left(AB\right)^{-1}=B^{-1}A^{-1}; \quad \left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}. \qquad (27)$$

Пример 3. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases}5x-y-z=0\\ x+2y+3z=14\\ 4x+3y+2z=16\end{cases}$$

Запишем систему в матричном виде:

$$AX=B \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix}5 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}, (см. пример 1).

Найдем вектор X

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}B=\ A^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ -10 & -14 & 16\\ 5 & 19 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 14\\ 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

3.2. Метод Крамера решения СЛАУ

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Искомые неизвестные определяются следующим образом:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \;\; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \;\; \dots \;\; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \qquad (28)$$

Здесь Δ - *главный определитель* системы, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ - *частные определители* системы, получаемые из главного путем замены соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Пример 4. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1;\quad x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;\quad x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Как видно, результат совпадает с результатом, полученным выше матричным методом.

3.3. Задачи

1. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Найти (методом присоединенной матрицы) матрицу, обратную к данной:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 0\end{pmatrix}$$

3.Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

4.Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$$

5. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7. \end{cases}$$

6. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$$

7. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

8. Решить систему с помощью обратной матрицы $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6. \end{cases}$

3.4. Общая теория СЛАУ

3.4.1. Подпространства матриц

Матричный метод и метод Крамера применимы только к системам с квадратной и невырожденной матрицей, когда число неизвестных равняется числу уравнений и все уравнения линейно независимы. В этом случае система имеет единственное решение и потому называется *определенной*.

Рассмотрим СЛАУ общего вида, т.е. с прямоугольной матрицей, на следующем частном примере

$$A_{m\times n}X_n = B_m; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Данное уравнение можно рассматривать как отображение, которое каждому вектору X_n из n-мерного пространства R^n ставит в соответствие определенный вектор B_m m-мерного пространства R^m. При этом вектор B_m называют образом вектора X_n, а его, в свою очередь, - прообразом B_m. Все множество векторов-образов называется *образом матрицы A* - $\mathrm{Im}(A)$. Это множество является *областью значений E(A) матричного оператора* и представляет собой линейное подпространство пространства R^m, поскольку включает и нулевой вектор: $\mathrm{Im}_m(A_{m\times n}) \subset R^m$. Очевидно, что *множеством определения D(A) матричного оператора* является все линейное пространство R^n: $D(A_{m\times n}) = R^n$.

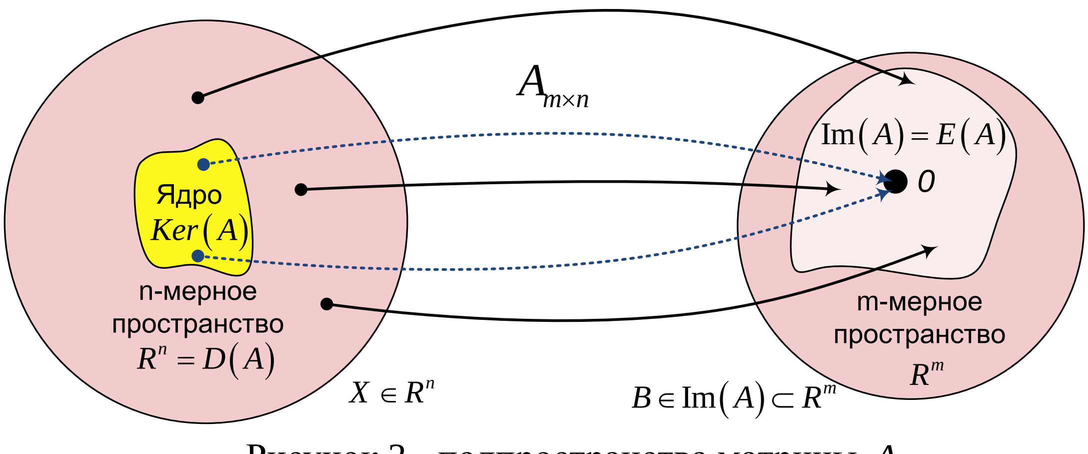

Рисунок 3 - подпространства матрицы $A_{m\times n}$

Образ матрицы совпадает с пространством $Rc(A)$ *ее столбцов:* $\mathrm{Im}(A) = Rc(A)$. Это видно из следующего представления уравнения (29)

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad (30)$$

откуда следует, что вектор B_m является линейной комбинацией столбцов матрицы A.

Нуль-пространством $Z(A)$ *матрицы A* называется множество решений однородной системы

$$A_{m\times n} X_n = 0_m, \text{ например } \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Это множество является линейным подпространством пространства R^n: $Z_n(A_{m\times n}) \subset R^n$. Каждый вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T$, принадлежащий этому пространству, преобразуется матричным оператором в нулевой вектор $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ пространства R^m. Нуль-пространство матрицы называется также *ядром* этой матрицы *Ker(A)*, а его размерность – *дефектом* матрицы *dfc(A)*.

Рассматривая матрицу как совокупность строк, из выражения (31) заключаем, что нуль-пространство ортогонально пространству строк $Rl(A)$: $Z_n(A) \perp Rl_n(A)$.

СЛАУ общего вида могут или вовсе не иметь решений (*переопределенные или несовместные системы*) или иметь бесконечное множество решений (*недоопределенные системы*).

Поэтому при решении СЛАУ общего вида необходимо выяснить, совместна ли она, т.е. имеет ли она решения. *Из выражения (30) следует, что столбец свободных членов совместной системы представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы системы. В несовместной системе столбец свободных членов нельзя представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы, он линейно независим от столбцов матрицы.* Поэтому вопрос совместности основан на определении рангов основной A и расширенной $A|B$ матриц системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

3.4.2. Теорема Кронекера – Капелли (условие совместности системы)

(Леопольд Кронекер (1823-1891) немецкий математик,
Альфре́до Капе́лли (1855 -1910) итальянский математик)

Теорема: *Система совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы*

$$rank(A) = rank(A|B). \qquad (32)$$

Если же $rank(A) < rank(A|B)$, то система несовместна (переопределенная).

При этом, если равенство (32) выполняется и этот ранг равен числу неизвестных *r(A)=dim(X)*, то система имеет единственное решение (определенная), а если он меньше числа неизвестных *r(A)<dim(X),* то система имеет бесчисленное множество решений (недоопределенная).

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2 \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 - 6 = 5 \neq 0; \quad r(A) = 2.$$

$$\text{A|B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}$$

$$r(A|B) = 3.$$

Система несовместна.

3.4.3. Метод Гаусса

(Карл Фридрих Гаусс (1777-1855) немецкий математик)

В отличие от матричного метода и метода Крамера, метод Гаусса может быть применен к системам линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных. Суть метода заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований строк, к которым относятся:

1) Прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого, умноженных на одно и то же число, не равное нулю.

2)Перестановка уравнений местами.

3)Удаление из системы «нулевых» уравнений, являющихся тождествами для всех x.

Достоинством метода Гаусса является то, что в процессе исключения неизвестных попутно определяется ее совместность. Метод удобнее использовать преобразуя строки расширенной матрицы системы к ступенчатому виду. Эта процедура называется *прямым ходом метода Гаусса*. Последовательное определение неизвестных снизу вверх называется *обратным ходом метода Гаусса*.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Преобразуем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Представим систему в координатной форме:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3; \\ 5x_2 - 7x_3 = 11; \\ -x_3 = -2. \end{cases}$$

Выполним обратный ход метода Гаусса:

— из последнего уравнения найдем $x_3 = 2$;

— подставим $x_3 = 2$ во второе уравнение, из которого найдем $x_2 = 5$;

— подставим $x_3 = 2$, $x_2 = 5$ в первое уравнение, откуда $x_1 = 1$.

Таким образом, $X = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}^T$. Это определенная система.

3.5. Задачи

1. Исследовать систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -2x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$

2. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$

3. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

3.5.1. Фундаментальная система решений

Вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^T$ будем называть *частным решением* системы линейных уравнений $A_{m\times n} X_n = B_m$, если при подстановке этого вектора в систему получается тождество.

Совокупность всех частных решений системы линейных уравнений назовем *общим решением системы.*

Рассмотрим однородную линейную систему, например, вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое *тривиальным*, решение, для которого все неизвестные имеют *нулевое значение*. Все решения системы (33) образуют нуль-пространство (ядро) рассматриваемой матрицы A, а его размерность - дефект ν определяется соотношением

$$\nu = n - r. \tag{34}$$

Покажем это на примере (33). Приведем систему комбинацией строк к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Видно, что $r=2$. Удалим $m-r$ линейно зависимые от базисных строки (3-ю). Выберем r базисных, линейно независимых столбцов – например, 1-й и 3-й. Им соответствуют r базисных переменных – x_1, x_3. Остальные $n-r$ переменные, в нашем случае $-x_2, x_4$, будем называть *свободными (независимыми)*. Перенесем их в правую часть системы, получим

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = -3x_2 - 2x_4; \\ 3x_3 = -x_4, \end{cases}$$

или в матричном виде

$$A^b_{r\times r} X_r^{\,b} = A^f_{(m-r)\times(n-r)} X^{\,f}_{n-r}, \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Получившаяся система является системой «Крамеровского» типа с квадратной невырожденной матрицей $A^b_{r\times r}$, а потому ее можно решать любым известным способом, например матричным:

$$X_r^{\,b}=\left(A^b_{r\times r}\right)^{-1}A^f_{(m-r)\times(n-r)}X^{\,f}_{n-r},$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&-3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&-2\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1\\0&-1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}. \qquad (37)$$

Полагая вектор свободных переменных $\begin{pmatrix}x_2 & x_4\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}c_1 & c_2\end{pmatrix}^T$, где c_1, c_2 - произвольные величины, получим общее решение однородной системы (33)

$$\begin{cases}x_1=-3c_1-c_2;\\x_2=c_1;\\x_3=-1/3c_2;\\x_4=c_2.\end{cases}\quad\to\quad X_n=F_{n\times(n-r)}C_{n-r};\quad\to\quad\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-1\\1&0\\0&-1/3\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} \qquad (38)$$

Матрица $F_{n\times(n-r)}$ называется *фундаментальной системой решений* (ФСР) однородной системы уравнений *(33). Она образована* $n-r$ *вектор-столбцами, которые являются линейно независимыми частными решениями однородной системы, и представляют собой базис нуль-пространства (ядра) матрицы А*. Линейная оболочка этих векторов (множество всех их линейных комбинаций) является общим решением рассматриваемой однородной системы уравнений (33).

Фундаментальная система решений называется *нормальной* (как в выражении (38)), если она образована решениями системы, при которых вектор свободных переменных последовательно принимает значения столбцов единичной матрицы.

Таким образом, общее решение однородной системы линейных уравнений (33) представляет собой линейную оболочку векторов фундаментальной системы решений.

3.5.2. Решение неоднородной СЛАУ

Рассмотрим неоднородную СЛАУ, например вида:

$$\begin{pmatrix}1&3&3&2\\2&6&9&5\\-1&-3&3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}. \qquad (39)$$

Будем полагать, что система (39) совместна.

Общее решение неоднородной системы уравнений представляет собой сумму общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной.

$$X_{неоднород} = X_{однор} + X_{частное}$$

Как и для однородного случая, приведем систему (39) комбинацией строк к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{pmatrix}. \qquad (40)$$

Если система совместна, то, очевидно, должно выполняться условие $b_3 - 2b_2 + 5b_1 = 0$, тогда последнее уравнение (40) становится тождеством 0=0, и его можно отбросить.

Далее действуем, как и в случае с однородной системой. В результате получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 - b_2 \\ (b_2 - 2b_1)\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 - b_2 \\ 0 \\ 1/3(b_2 - 2b_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} c_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} c_2 . \qquad (41)$$

Сравнивая это решение с решением однородной системы (38), мы видим, что оно отличается от общего решения однородной системы только одним слагаемым – частным решением неоднородной системы.

3.5.3. Решение несовместных СЛАУ по МНК

В завершении этого раздела рассмотрим случай несовместной СЛАУ. Такие системы уравнений часто возникают на практике, когда необходимо оценить некоторый вектор X неизвестных параметров по результатам большого количества неточных измерений. В этом случае в системе $A_{m\times n} X_n = B_m$ число уравнений, т.е. ограничений, накладываемых на переменные, превышает число неизвестных m>n, и система становится переопределенной.

Точного решения X не существует, однако можно получить некоторую оценку X^* этого решения, которая дает наиболее близкий, в определенном смысле, к вектору B вектор AX^*. На практике получил широкое распространение метод наименьших квадратов (МНК). Оценка X^*, оптимальная в смысле МНК, удовлетворяет условию минимума суммы квадратов разностей

$$\left(B - AX^*\right)^T \left(B - AX^*\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i - Ax_i^*\right)^2 \to \min. \qquad (42)$$

В результате минимизации выражения (42), получим следующую оптимальную в указанном выше смысле оценку решения несовместной СЛАУ

$$X^* = \left(AA^T\right)^{-1} A^T B. \qquad (43)$$

3.6. Задачи

1. Найти общее решение системы линейных уравнений

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -7x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ -3x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКТОРОВ

4.1. Скалярное произведение векторов, евклидово пространство

Скалярным произведением геометрических векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi. \qquad (44)$$

Вещественное линейное пространство E называется ***евклидовым***, если каждой паре элементов (векторов) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из E поставлено в соответствие вещественное число $\vec{a}\cdot\vec{b}$ или $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, называемое скалярным или внутренним произведением, причем выполнены следующие аксиомы:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; коммутативность
2) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$; дистрибутивность (45)
3) $(\mathrm{m}\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\mathrm{m}\vec{b}) = \mathrm{m}(\vec{a}\cdot\vec{b})$, m=const; ассоциативность
4) $\vec{a}\cdot\vec{a} >0$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{0}\cdot\vec{0}=0$; свойства нормы вектора.

Скалярное произведение в координатном представлении

Пусть задан *ортонормированный* базис $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ и два геометрических вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатные столбцы которых имеют вид:

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}^T;\quad b=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}^T.$$

Скалярное произведение определяется выражением

$$a^Tb=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \qquad (46)$$

Последнее выражение легко распространяется и на n-мерные алгебраические векторы.

В n-мерном линейном пространстве алгебраические *векторы a и* b *называются ортогональными* если их скалярное произведение равно нулю

$$a\perp b\rightarrow a^Tb=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=0. \qquad (47)$$

Длина вектора $|a|$ – его модуль или норма – определяется из выражения (46) для частного случая скалярного произведения вектора на самого себя

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2, \quad a^T a = a_1^2+a_2^2+a_3^2=|a|^2, \quad |a|=\sqrt{a^T a}\,. \tag{48}$$

Для пространств, размерность которых превышает три, норма вектора теряет геометрический смысл.

Угол между векторами линейного пространства для $\vec{a}\neq\vec{o}$ и $\vec{b}\neq\vec{o}$ определяется из (44) и (46)

$$\cos\varphi=\frac{a^T b}{\sqrt{a^T a}\sqrt{b^T b}}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\,. \tag{49}$$

Компоненты вектора в ортонормированном базисе равны его скалярным проекциям на оси координат.

Пример. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}$.

Т.е. $a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}^T$, $b=\begin{pmatrix}6 & 4 & -2\end{pmatrix}^T$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a^T b=6+8-6=8$; $|\vec{a}|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$; $\quad |\vec{b}|=\sqrt{36+16+4}=\sqrt{56}$;

$$\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}}=\frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}; \qquad \varphi=\arccos\frac{2}{7}.$$

Пример. Найти скалярное произведение $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(5\vec{a}-6\vec{b})$, если $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, $\vec{a}\wedge\vec{b}=\pi/3$.

$$15\vec{a}\cdot\vec{a}-18\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{b}=15|\vec{a}|^2-28|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3}+12|\vec{b}|^2=$$

$$=15\cdot16-28\cdot4\cdot6\cdot\frac{1}{2}+12\cdot36=240-336+432=672-336=336.$$

4.2. Векторное произведение векторов

Ориентация базиса

Базис в пространстве называется *правым*, если с конца третьего вектора мы видим кратчайший поворот от первого вектора ко второму направленным против часовой стрелки. Или когда при повороте по кратчайшему расстоянию первого вектора ко второму острие правого буравчика движется вдоль третьей оси. В противном случае базис называется *левым*.

Векторным произведением геометрических векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который:

1) ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\sin\varphi \geq 0; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$;

3) дополняет векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ до правой тройки векторов.

Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$.

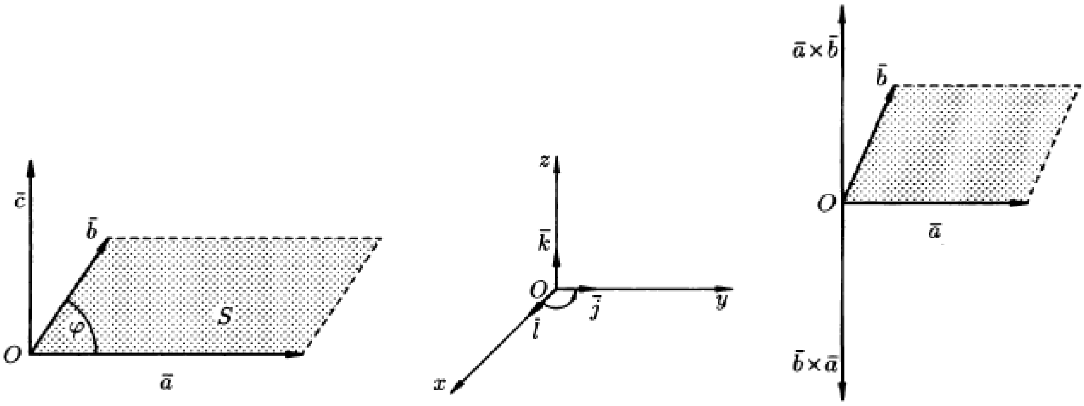

Рисунок 4 - Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Свойства векторного произведения векторов

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ - антикоммутативность векторного произведения;

2) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$ или $\vec{a} = 0$ или $\vec{b} = 0$;

3) $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$ - ассоциативность;

4) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ - дистрибутивность.

Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами (см. рисунок 4):

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}. \tag{50}$$

Векторное произведение в координатном представлении

Пусть задан ортонормированный базис $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ и два геометрических вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатные столбцы которых в этом базисе имеют вид:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^T; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}^T,$$

тогда

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{i}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \qquad (51)$$

Геометрические приложения векторного произведения

Площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Согласно определению векторного произведения векторов

$$S_{пар}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{a}\times\vec{b}|; \qquad S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|. \qquad (52)$$

Выражение для площади параллелограмма (52) справедливо и для случая, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в плоскости OXY, поскольку их координаты можно дополнить нулевой компонентой по оси аппликат

$$a=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & 0\end{pmatrix}^T; \quad b=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & 0\end{pmatrix}^T, \text{ тогда}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}=(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}; \quad S_{пар}=|\vec{a}\times\vec{b}|=|a_1b_2-a_2b_1|. \qquad (53)$$

Из последнего выражения выясняется ***геометрический смысл определителя 2-го порядка*** – он равен *ориентированной площади параллелограмма*, построенного на его вектор-столбцах (равно как и на вектор-строках). Очевидно, что площадь параллелограмма равна нулю (при $|\vec{a}|\neq 0; |\vec{b}|\neq 0$) только когда образующие его векторы коллинеарны, т.е линейно зависимы. Поэтому, *равенство нулю определителя 2-го порядка (равно как и n-го порядка) является критерием линейной зависимости образующих его столбцов (строк)*.

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

$$a=\begin{pmatrix}2 & 5 & 1\end{pmatrix}^T; \quad b=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}^T.$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-17\vec{i}+7\vec{j}-\vec{k}=\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-17\\ 7\\ -1\end{pmatrix}$$

.

Пример. Вычислить площадь треугольника с вершинами A(2, 2, 2), B(4, 0, 3), C(0, 1, 0).

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}^T$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}^T$$

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-1-4) - \vec{j}(-2+4) + \vec{k}(4+2) = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{25+4+36} = \sqrt{65}. \qquad S_{\Delta} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

т.к. определитель матрицы равен нулю, то векторы линейно зависимы, т.е. компланарны.

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}; \quad 3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1; \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = 30^0.$

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

$$S = 8|\bar{b}||\vec{a}|\sin 30^0 = 4 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

4.3. Смешанное произведение векторов

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом: $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор. Такое произведение называется векторно-скалярным, или смешанным, произведением трех векторов. Смешанное произведение представляет собой некоторое число.

Выясним геометрический смысл выражения $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Построим параллелепипед, ребрами которого являются векторы $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ и вектор $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$, как показано на рисунке 5.

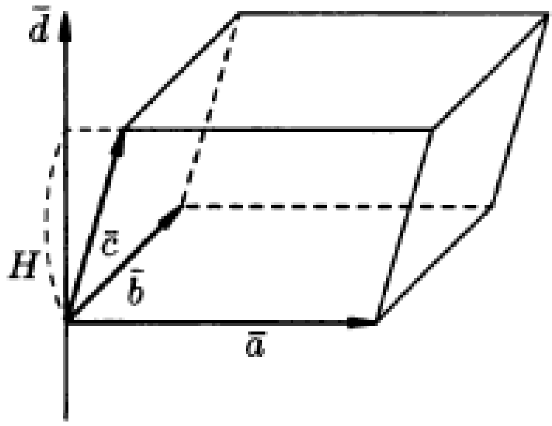

Рисунок 5– Геометрический смысл смешанного произведения векторов

Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$ численно равно ориентированному объему параллелепипеда, построенного на этих векторах:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=S_{пар}\cdot\left(\pm H\right)=\pm V. \qquad (54)$$

Знак объема параллелепипеда определяется ориентацией тройки векторов, его образующих.

Свойства смешанного произведения:

1)Смешанное произведение равно нулю, если:

а) хоть один из векторов равен нулю;

б) два из векторов коллинеарны;

в) векторы компланарны.

2) Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т.е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$. В этом случае не изменяется ориентация тройки векторов.

3) Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$. Действительно, в этом случае не изменяется ни объем параллелепипеда, ни ориентация его ребер. Это позволяет записывать смешанное произведение векторов

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ без знаков векторного и скалярного умножения в виде $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

4) Смешанное произведение меняет свой знак при перестановке любых двух векторов-сомножителей, т. е.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})\,.$$

5) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$.

Смешанное произведение в координатном представлении

Смешанное произведение векторов равно определителю третьего порядка, составленному из координат перемножаемых векторов.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \qquad (55)$$

Приложения смешанного произведения

На основании (54) определим объемы параллелепипеда V_1 и треугольной пирамиды V_2

$$V_1=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|; \quad V_2=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|. \qquad (56)$$

Из выражения (55) выясняется ***геометрический смысл определителя 3-го порядка*** – он равен *ориентированному объему параллелепипеда*, построенного на его вектор-столбцах (равно как и на вектор-строках). Очевидно, что объем параллелепипеда равен нулю (при $\left|\vec{a}\right|\neq 0;\left|\vec{b}\right|\neq 0;\left|\vec{c}\right|\neq 0$) только когда образующие его векторы компланарны, т.е линейно зависимы.

По индукции заключаем, что ***геометрическим смыслом определителя n-го порядка*** является ориентированный объем «многогранника», построенного на образующих его вектор-столбцах (строках).

Равенство нулю определителя n-го порядка является критерием линейной зависимости образующих его столбцов (строк).

<u>Пример.</u> Доказать, что точки A(5; 7; 2), B(3; 1; 3), C(9; 4; 0), D(1; 5; 4) лежат в одной плоскости.

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$:

$$AB=\begin{pmatrix}-2 & -6 & 1\end{pmatrix}^T; \quad AC=\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\end{pmatrix}^T; \quad AD=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\end{pmatrix}^T.$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 4 & -3 & -2\\ -4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -6 & 1\\ 0 & -15 & 0\\ 0 & 10 & 0\end{vmatrix}=0,$$

Таким образом, полученные выше векторы компланарны, следовательно, точки A, B, C и D лежат в одной плоскости.

Пример. Найти объем пирамиды и длину высоты, опущенной на грань BCD, если вершины имеют координаты A(0; 0; 1), B(2; 3; 5), C(6; 2; 3), D(3; 7; 2).

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}$:

$$BA=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -4\end{pmatrix}^T;\quad BD=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\end{pmatrix}^T;\quad BC=\begin{pmatrix}4 & -1 & -2\end{pmatrix}^T.$$

Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-2 & -3 & -4\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left(16+36+4+64-6+6\right)=20(ед^3).$$

Для нахождения длины высоты пирамиды найдем сначала площадь основания BCD.

$$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 4 & -3\\ 4 & -1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}(-8-3)-\vec{j}(-2+12)+\vec{k}(-1-16)=-11\vec{i}-10\vec{j}-17\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{11^2+10^2+17^2}=\sqrt{121+100+289}=\sqrt{510}$$

$S_{осн}$ = $\sqrt{510}$ / 2 (ед^2)

Т.к. V = $\dfrac{S_{осн}\cdot h}{3}$; $\quad h=\dfrac{3V}{S_{осн}}=\dfrac{120}{\sqrt{510}}$.(ед)

4.4. Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть вектор $\overline{x}$ разложен по базисным векторам линейного, например 2-мерного, пространства $\overline{\xi}_1,\overline{\xi}_2$ как показано на рисунке 6.

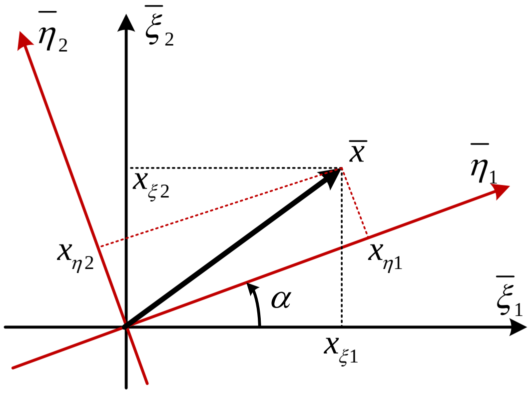

Рисунок 6 – Преобразование плоскости вращением

Этот же вектор $\bar{x}$ можно представить в виде линейной комбинации новых базисных векторов $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$. Тогда должны выполняться равенства:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix}. \tag{57}$$

Пусть новый базис $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ является линейным преобразованием старого $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ с невырожденной матрицей S

$$\begin{cases} \bar{\eta}_1 = \bar{\xi}_1 s_{11} + \bar{\xi}_2 s_{21} \\ \bar{\eta}_2 = \bar{\xi}_1 s_{12} + \bar{\xi}_2 s_{22} \end{cases};$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} S. \tag{58}$$

Объединяя эти выражения, получим

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix},$$

откуда получим ***формулы преобразование координат вектора при замене базиса***

$$\begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix}; \qquad x_\xi = S x_\eta; \qquad x_\eta = S^{-1} x_\xi. \tag{59}$$

Здесь x_ξ и x_η - координатные столбцы вектора x в старом и новом базисах соответственно; S - матрица преобразования координат составленная из координатных столбцов новых базисных векторов в старом базисе.

Для примера, представленного на рисунке 2, получим

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 & \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} x_{\eta 1} \\ x_{\eta 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{\xi 1} \\ x_{\xi 2} \end{pmatrix}. \qquad (60)$$

4.5. Задачи

1. Даны точки $A(5;-4),\ B(0;8),\ C(-4;10),\ D(3;6),\ E(1;-5)$. Определить расстояние между *A* и *B*, *A* и *D*, *C* и *E*, *A* и *E*.

2. Найти $\vec{a}\vec{b}$, если
   а) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ \alpha = 60^0$
   б) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ \alpha = 0^0$
   в) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ \alpha = -30^0$
   г) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ \alpha = 180^0$

3. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:
   а) $\vec{a} = (3;1),\ \vec{b}(1;2).$

   б) $\vec{a} = (4;-5),\ \vec{b}(-6;4).$

4. Для данных векторов указать пары коллинеарных и перпендикулярных векторов: $\vec{a} = (8;6;12),\ \vec{b} = (-3,4,0),\ \vec{c} = (20;15;30).$

5. Известно, что угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ составляет 60^0, а $|\vec{p}| = 5$, $|\vec{q}| = 6$.
Вычислить:
а) $(-2\vec{p} - \vec{q})(3\vec{p} + 2\vec{q})$

б) $(2\vec{p} - \vec{q})(2\vec{p} + \vec{q})$

6. Определить углы в треугольнике ABC, если известны координаты его вершин: A(2;5;-1), B(-6; 9;2), C(2;-1;-1).

7. Вычислить направляющие косинусы вектора $d = (16;9;-4)$

8. Найти объем параллелепипеда, если образующие его векторы заданы координатами точек: A(1;4;5), B(2;-2;3); C(-2;-6;-4); D(2:-1;1).

9. Вычислить площадь треугольника с вершинами в точках A(2;3;0), B(4;-4;1); C(-5;5;8).

10. Определить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 4\vec{p} + 2\vec{q}$, $\vec{b} = 5\vec{p} - 2\vec{q}$, где $|\vec{p}| = 3; |\vec{q}| = 4$, угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ равен 45^0.

11. Найти объем пирамиды, вершины которой находятся в точках A(3;2;0), B(4;-2;2); C(-2;-5;-4), D(-2;7;-3).

12. При каком значении α векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны?
$a=(1;-9;4),\ b=(5;\alpha;4),\ c=(2;6;-3)$

5. ПРЯМЫЕ ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ

5.1. Уравнение линии на плоскости

5.1.1. Основные понятия

Уравнением линии (или кривой) на плоскости *Oxy* называется такое уравнение $F(x; y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Всякому уравнению вида $F(x;y)=0$ соответствует, вообще говоря, некоторая линия (возможно вырожденная), свойства которой определяются данным уравнением. Так, уравнению $(x-2)^2+(y-3)^2=0$ соответствует не линия, а точка $(2;3)$; уравнению $x^2+y^2+5=0$ на плоскости не соответствует никакой геометрический образ.

Пример 1. Лежат ли точки $K(-2;1)$ и $L(1;1)$ на линии $2x+y+3=0$?

Решение: Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки K, получим $2\cdot(-2)+1+3=0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, т. к. $2\cdot 1+1+3\neq 0$.

Параметрическое задание линии на плоскости:

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \tag{61}$$

где x и y - координаты произвольной точки $M(x; y)$, лежащей на данной линии, а t - переменная, называемая параметром; параметр t определяет положение точки $(x; y)$ на плоскости.

5.1.2. Уравнения прямой на плоскости

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y=kx+b, \qquad k=tg\alpha \tag{62}$$

Число $k=tg\alpha$ называется *угловым коэффициентом* прямой, а уравнение (62) - *уравнением прямой с угловым коэффициентом*.

Общее уравнение прямой

$$Ax+By+C=0, \tag{63}$$

где A, B, C - произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Уравнения пучка прямых, проходящих через данную точку

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{64}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая должна проходить через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку M_1, имеет вид

$$y-y_1=k(x-x_1),\qquad k\in R. \tag{65}$$

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};\qquad y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1);\qquad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \tag{66}$$

Предполагается, что в этом уравнении $x_1\neq x_2, y_1\neq y_2$.

Уравнение прямой в отрезках $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.$

Числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

Нормальное уравнение прямой, проходящей через данную точку

Найдем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\bar{n}=(A;B)$.

Возьмем на прямой произвольную точку *M(x;y)* и рассмотрим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0)$ (см. рис. 7). Поскольку векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_oM}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, то есть

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \tag{67}$$

Уравнение (67) называется *уравнением прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно заданному вектору*.

Вектор $\bar{n}=(A;B)$ перпендикулярный прямой, называется *нормальным вектором этой прямой*.

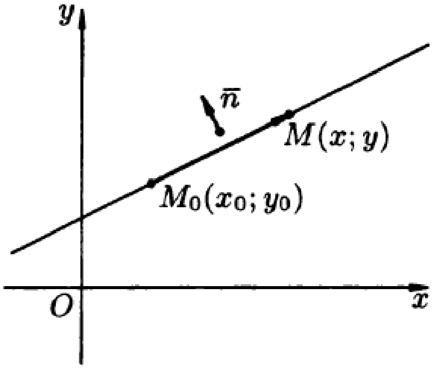

Рисунок 7.

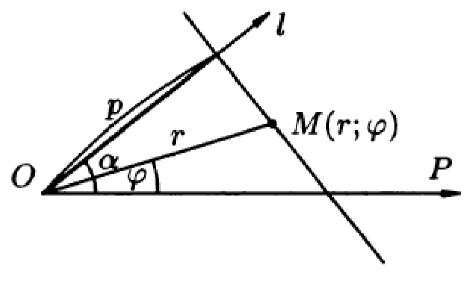

Рисунок 8.

Полярное уравнение прямой

Найдем уравнение прямой в полярных координатах. Ее положение можно определить, указав расстояние p от полюса O до данной прямой и угол α между полярной осью OP и осью l, проходящей через полюс O перпендикулярно данной прямой (см. рис. 8).

Для любой точки $M(r;\varphi)$ на данной прямой имеем:

$$np_l\overline{OM} = p\,.$$

С другой стороны,

$$np_l\overline{OM} = \overline{OM}\cdot\cos(\alpha-\varphi) = r\cdot\cos(\varphi-\alpha).$$

Следовательно,

$$r\cos(\varphi-\alpha) = p. \tag{68}$$

Полученное уравнение (68) и есть *уравнение прямой в полярных координатах*.

Нормальное уравнение прямой

Пусть прямая определяется заданием p и α (см. рис. 9). Тогда используя скалярное произведение, получим $\overline{n}\cdot\overline{r} = p,\qquad |\overline{n}| = 1.$

Следовательно, уравнение прямой в прямоугольной: системе координат примет вид

$$x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha - p = 0, \tag{69}$$

Уравнение (69) называется *нормальным уравнением прямой*.

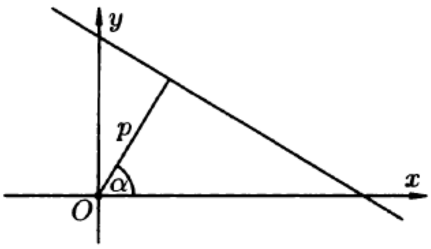

Рисунок 9.

Покажем, как привести общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$ к виду (69).

Умножим все члены уравнения (63) на некоторый множитель $\lambda\neq 0$ и приравняем его к выражению (69)

$$\lambda Ax+\lambda By+\lambda C = x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha - p.$$

Должны выполняться равенства

$$\lambda A=\cos\alpha,\qquad \lambda B=\sin\alpha,\qquad \lambda C=-p. \tag{70}$$

Из первых двух равенств находим $\lambda^2A^2+\lambda^2B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, откуда

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Множитель λ называется *нормирующим множителем*. Согласно третьему равенству (70) $\lambda C = -p$ знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена C общего уравнения прямой.

Пример 2. Привести уравнение $-3x + 4y + 15 = 0$ к нормальному виду.

Решение: Находим нормирующий множитель $\lambda = \frac{-1}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}$. Умножая данное уравнение на λ, получим искомое нормальное уравнение прямой: $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0.$

5.1.3. Прямая линия на плоскости. Основные задачи

Угол между двумя прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (см. рис.10).

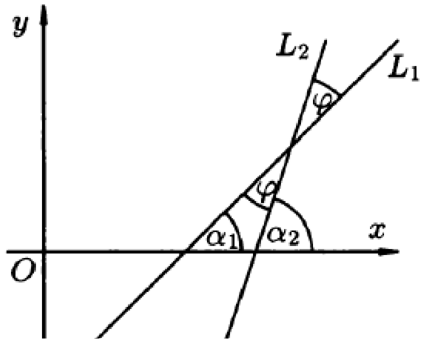

Рисунок 10.

Тогда $$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \qquad (71)$$

Условие параллельности двух прямых: $k_2 = k_1$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы прямая L уравнением $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис.11). Требуется найти расстояние от точки M_0 до прямой L.

Решение: Расстояние d от точки M_0 до прямой L равно модулю проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1;y_1)$ - произвольная точка прямой L, на направление нормального вектора $\bar{n}=(A;B)$. Следовательно,

$$d=\left|np_{\bar{n}}M_1M_0\right|=\left|\frac{\overline{M_1M_0}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}\right|=\frac{|(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

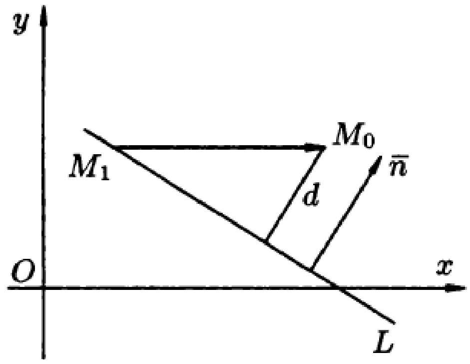

Рисунок 11.

Так как точка $M_1(x_1;y_1)$ принадлежит прямой L, то $Ax_1+By_1+C=0$, т. е. $C=-Ax_1-By_1$. Поэтому

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (72)$$

Пример 3. Найти расстояние от точки M_0 *(2;-1)* до прямой $3x+4y-22=0$.

Решение: По формуле (72) получаем $d=\frac{|3\cdot 2+4\cdot(-1)-22|}{\sqrt{9+16}}=\frac{20}{5}=4.$

5.2. Задачи

1. Написать уравнение линии, по которой движется точка *M(x;y)*, равноудаленная от точек *A(0;2)* и *B(4;-2)*. Лежат ли на этой линии точки *C(-1;1)*, *D(1;-1)*, *E(0;-2)* и *F(2;2)*?

2. Написать уравнение траектории точки M(x;y), которая при своем движении остается втрое дальше от точки A(0;9), чем от точки B(0;1).

3. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний от каждой из которых до точек F(2;0) и F1(-2;0) равна $2\sqrt{5}$. Построить линию по ее уравнению.

4. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок b=-3 и составляющую с осью Ox угол: 1) 60°; 2) 120°. Написать уравнения этих прямых.

5. Даны точки O(0;0) и A(-3;0). На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке B(0;2). Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

6. Определить угол между прямыми:

1) $y = 2x - 3, \ y = \frac{1}{2}x + 1$;

2) $5x - y + 7 = 0, \ 2x - 3y + 1 = 0$;

3) $2x + y = 0, \ y = 3x - 4$;

4) $3x + 2y = 0, \ 6x + 4y + 9 = 0$;

5) $3x - 4y = 6, \ 8x + 6y = 11$;

7. Построить точку A(-2;5) и прямую $2x - y = 0$. Написать уравнение пучка прямых, проходящих через A, и выбрать из пучка: 1) прямую, параллельную данной; 2) прямую, перпендикулярную к данной.

8. В точках пересечения прямой $2x-5y-10=0$ с осями координат восставлены перпендикуляры к этой прямой. Написать их уравнения.

9. В треугольнике с вершинами A(-2;0), B(2;6) и C(4;2) проведены высота BD и медиана BE. Написать уравнения стороны AC, медианы BE и высоты BD.

10. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x+2y=0$, $x+4y-6=0$, $x-4y-7=0$. Найти координаты вершин треугольника и его площадь.

11. Написать уравнения прямых, проходящих через точку A(1;1) под углом 45° к прямой $2x+3y=6$.

12. Найти расстояния от точек A(4;3), B(2;1) и C(1;0) до прямой $3x+4y-10=0$. Построить точки и прямую.

13. Показать, что прямые $2x-3y=6$ и $4x-6y=25$ параллельны, и найти расстояние между ними. Указание. На одной из прямых взять произвольную точку и найти расстояние от нее до другой прямой.

14. Найти k из условия, что прямая $y = kx + 5$ удалена от начала координат на расстояние $d = \sqrt{5}$.

15. Написать уравнение геометрического места точек, удаленных от прямой $4x - 3y = 0$ на расстояние $d = 4$.

16. Составить уравнение прямой, удаленной от точки A(4;-2) на расстояние $d = 4$ и параллельной прямой $8x - 15y = 0$.

17. Через начало координат провести прямую, образующую с прямыми $x + y = a$ и $x = 0$ треугольник площадью a^2.

5.3. Уравнения поверхности в пространстве

5.3.1. Основные понятия

Уравнением поверхности в прямоугольной системе координат $Oxyz$ называется такое уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{73}$$

с тремя переменными x, y и z, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на этой поверхности. Переменные x, y и z в уравнении поверхности называются ***текущими координатами*** точек поверхности.

В отдельных случаях уравнение (73) может определять не поверхность, а точку, линию или вовсе не определять никакой геометрический образ. Говорят, «поверхность вырождается». Так, уравнению $2x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не удовлетворяют никакие действительные значения x, y, z. Уравнению $0 \cdot x^2 + y^2 + z^2 = 0$ удовлетворяют лишь координаты точек, лежащих на оси Ox (из уравнения следует: $y = 0, z = 0,$ а x - любое число).

Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O_1(x_0, y_0, z_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

5.3.2. Уравнения плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть в пространстве $Oxyz$ плоскость Q задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\bar{n} = (A; B; C)$, перпендикулярным этой плоскости. Возьмем на плоскости Q произвольную точку $M(x, y, z)$ и составим вектор

$$|M_0M| = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

При любом расположении точки M на плоскости Q векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, т. е.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{74}$$

Уравнение (74) называется уравнением плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = (A; B; C)$. Оно первой степени относительно текущих координат x, y и z. Вектор $\bar{n} = (A; B; C)$ называется нормальным вектором плоскости.

Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (75)$$

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки

Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через три данные точки $M_1(x_1;y_1;z_1), M_2(x_2;y_2;z_2)$ и $M_3(x_3;y_3;z_3)$ не лежащие на одной прямой.

Возьмем на плоскости произвольную точку $M(x;y;z)$ и составим векторы

$$\overline{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1),$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1),$$

$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1).$$

Эти векторы лежат на плоскости Q, следовательно, они компланарны. Используем условие компланарности трех векторов (их смешанное произведение равно нулю), получаем

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (76)$$

Уравнение (76) есть *уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.*

Уравнение плоскости в отрезках $\quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1. \qquad (77)$

Нормальное уравнение плоскости

- в векторной форме

$$\bar{r} \cdot \bar{e} - p = 0; \qquad (78)$$

- в координатной форме

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \qquad (79)$$

Общее уравнение плоскости (75) можно привести к нормальному уравнению (79) так, как это делалось для уравнения прямой на плоскости. А именно: умножить обе части уравнения (75) на нормирующий множитель $\lambda = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

5.3.3. Плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Под ***углом между плоскостями*** Q_1 и Q_2 понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами $\overline{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\overline{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ плоскостей $Q1$ и $Q2$ равен одному из этих углов

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (80)$$

Для нахождения острого угла следует взять модуль правой части.

Условие перпендикулярности двух плоскостей Q_1 и Q_2:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (81)$$

Если плоскости Q_1 и Q_2 параллельны, то будут параллельны и их нормали $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$, тогда условие параллельности двух плоскостей Q_1 и Q_2:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (82)$$

Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0.$ Расстояние d от точки M_0 до плоскости Q находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5.4. Уравнения линии в пространстве

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как геометрическое место точек, общих двум поверхностям.

Если $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$ - уравнения двух поверхностей, определяющих линию L, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \qquad (83)$$

Уравнения (83) называются ***уравнениями линии* в пространстве**.

Линию в пространстве можно определять *векторным уравнением*

$$\bar{r} = \overline{r(t)} \qquad (84)$$

или *параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

проекций вектора (84) на оси координат.

Векторное уравнение прямой

Пусть прямая L задана ее точкой: $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и направляющим вектором $\bar{S} = (m; n; p)$.

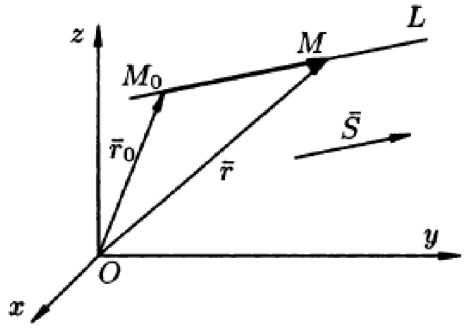

Рисунок 12

Возьмем на прямой: L произвольную точку $M(x; y; z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$. Очевидно, что три вектора $\bar{r}_0, \bar{r}$ и $\overline{M_0M}$ связаны соотношением

$$\bar{r}_0 = \bar{r} + \overline{M_0M}. \qquad (85)$$

Вектор $\overline{M_0M}$, лежащий: на прямой: L, параллелен направляющему вектору $\bar{S}$, поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t - скалярный множитель, называемый параметром, который может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой.

Получим *векторное уравнение прямой*

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}. \qquad (86)$$

Параметрические уравнения прямой

Замечая, что $\bar{r} = (x; y; z)$, $\bar{r}_0 = (x_0; y_0; z_0)$, $t\bar{S} = (tm; tn; tp)$, уравнение (86) можно записать в виде

$$x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}=(x_0+tm)\bar{i}+(y_0+tn)\bar{j}+(z_0+tp)\bar{k}.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt. \end{cases} \qquad (87)$$

Они называются *параметрическими уравнениями прямой*, в пространстве.

Канонические уравнения прямой

Из параллельности векторов $\overline{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$ и $\bar{S}=(m;n;p)$ получаем ***канонические уравнениями прямой*** в пространстве:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (88)$$

Уравнения (88) можно было бы получить сразу из параметрических уравнений прямой (87), исключив параметр t.

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t.$$

Обращение в нуль одного из знаменателей уравнений (88) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

Например, уравнения $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{0}$ задают прямую, проходящую через точку $M_0(2;-4;1)$ перпендикулярно оси Oz (проекция вектора $\bar{S}$ на ось Oz равна нулю). Но это означает, что прямая лежит в плоскости $z=1$, и поэтому для всех точек прямой будет $z-1=0$.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$, тогда на основании (88) получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (89)$$

Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (90)$$

Уравнения (90) называют *общими уравнениями прямой*.

От общих уравнений (90) можно перейти к каноническим уравнениям (88) или (89).

1) Координаты точки M_0 на прямой *L* получаем из системы уравнений (90), придав одной из координат произвольное значение (например, *z* =0).

Так как прямая *L* перпендикулярна векторам $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$, то за направляющий вектор $\bar{S}$ прямой *L* можно принять векторное произведение $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}. \qquad (91)$$

2) Канонические уравнения прямой легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнения (89).

Пример. Написать канонические уравнения прямой *L*, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ 2x - y - 3z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение 1. Использование формулы (88).

Положим $z = 0$ и решим систему $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = -5. \end{cases}$ Находим точку $M_0(-2;1;0) \in L$.

Найдем направляющий вектор (91)

$$\bar{S}(m,n,p) = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 3-2 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

На основании (88) получим $\dfrac{x+2}{-4} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-3}$.

Решение 2. Использование формулы (89).

Пусть $M_1 = M_0(-2;1;0) \in L$. Найдем вторую точку $M_2(x_2; y_2; z_2)$ положив $y = 0$ и решив систему $\begin{cases} x - z = -1, \\ 2x - 3z = -5. \end{cases}$ - получим $M_2(2;0;3)$;

$$M_1M_2 = (2;0;3) - (-2;1;0) = (4;-1;3).$$

На основании (89) уравнение прямой *L*, проходящей через точки M_1 и M_2

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{3}.$$

5.4.1. Прямая в пространстве. Основные задачи

Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Под углом между этими прямыми понимают угол между направляющими векторами $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2=(m_2;n_2;p_2)$.

Поэтому, по формуле для косинуса угла между векторами, получаем

$$\cos\varphi=\frac{\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2}{\left|\overline{S}_1\right|\cdot\left|\overline{S}_2\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \qquad (92)$$

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 числитель правой части формулы (92) следует взять по модулю.

Если *прямые L_1 и L_2 перпендикулярны*, то $\cos\varphi=0$, следовательно:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Если *прямые L_1 и L_2 параллельны*, то параллельны их направляющие векторы S_1 и S_2. Следовательно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Пример. Найти угол между прямыми

$$\frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+2}{3} \text{ и } \begin{cases}2x+y-z-1=0,\\2x-y+3z+5=0.\end{cases}$$

Решение: Очевидно, $\overline{S}_1=(2;-1;3)$, а $\overline{S}_2=\overline{n}_1\times\overline{n}_2$, где $\overline{n}_1=(2;1;-1)$, $\overline{n}_2=(2;-1;3)$. Отсюда следует, что $\overline{S}_2=(2;-8;-4)$. Так как $\overline{S}_1\cdot\overline{S}_2=4+8-12=0$, то $\varphi=90°$.

Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Их направляющие векторы соответственно $S_1=(m_1;n_1;p_1)$ и $S_2=(m_2;n_2;p_2)$ (см. рис. 13).

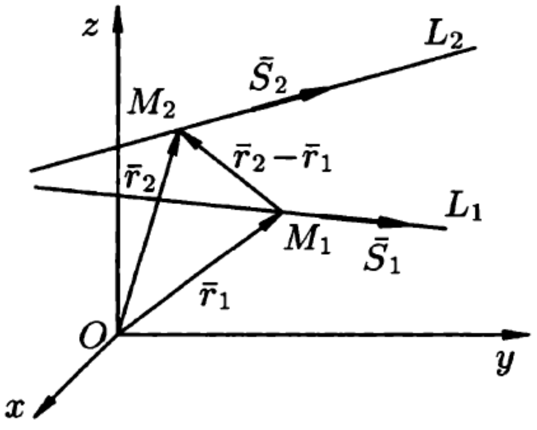

Рисунок 13

Прямая L_1 проходит через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_1$; прямая L_2 проходит через точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, радиус-вектор которой обозначим через $\bar{r}_2$, тогда

$$\bar{r}_2-\bar{r}_1=\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, если векторы S_1, S_2 и $\overline{M_1M_2}=\bar{r}_2-\bar{r}_1$ компланарны. Условием компланарности векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\bar{r}_2-\bar{r}_1)\bar{S}_1\bar{S}_2=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (93)$$

При выполнении этого условия прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, то есть либо пересекаются, если $\bar{S}_2\neq\lambda\bar{S}_1$, либо параллельны, если $\bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2$.

5.4.2. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи

Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость Q задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0,$, а прямая L уравнениями

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость. Обозначим через φ

угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ - угол между векторами $\bar{n}=(A;B;C)$ и $\bar{S}=(m;n;p)$ (см.рис. 14), тогда $\cos\theta=\dfrac{\bar{n}\cdot\bar{S}}{|\bar{n}|\cdot|\bar{S}|}$.

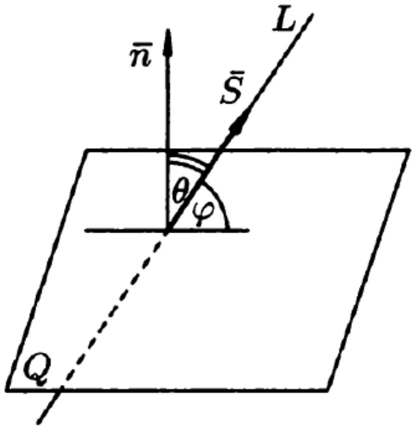

Рисунок 14

Найдем синус угла φ, считая $\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$: $\sin\varphi=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$.

Так как $\sin\varphi\ge 0$, получаем

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{94}$$

Если *прямая L параллельна плоскости Q,* то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ перпендикулярны, а потому $\bar{S}\cdot\bar{n}=0$, т. е.

$$Am+Bn+Cp=0$$

является ***условием параллельности*** прямой и плоскости.

Если прямая L перпендикулярна плоскости Q, то векторы $\bar{n}$ и $\bar{S}$ параллельны, поэтому равенства

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

являются ***условиями перпендикулярности*** прямой и плоскости.

Пересечение прямой с плоскостью. Условие принадлежности прямой плоскости

Пусть требуется найти точку пересечения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{95}$$

с плоскостью

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{96}$$

Для этого надо решить систему уравнений (95) и (96). Проще всего это сделать, записав уравнения прямой (95) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (97)$$

Подставляя эти выражения для x, y и z в уравнение плоскости (96), получаем уравнение $A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0$ или

$$t(Am + Bn + Cp) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0 \qquad . (98)$$

1) Если прямая L не параллельна плоскости, т. е. если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то из равенства (98) находим значение t:

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}. \qquad (99)$$

Подставляя найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой с плоскостью.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $Am + Bn + Cp = 0 (L \parallel Q)$:

а) если $F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$, то прямая L параллельна плоскости и пересекать ее не будет (уравнение (98) решения не имеет, так как имеет вид $0 \cdot t + F = 0$, где $F \neq 0$;

б) если $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, то уравнение (98) имеет вид $t \cdot 0 + 0 = 0$; ему удовлетворяет любое значение t, любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Заключаем: прямая лежит в плоскости. Таким образом, одновременное выполнение равенств

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \end{cases} \qquad (100)$$

является ***условием принадлежности прямой плоскости***.

5.5. Задачи

1. Найти углы нормали к плоскости $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ с осями координат.

2. Даны точки $M_1(0;-1;3)$ и $M_2(1;3;5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной к вектору $N=\overrightarrow{M_1M_2}$.

3. Найти угол между плоскостями:
1) $x-2y+2z-8=0$ и $x+z-6=0$;

2) $x+2z-6=0$ и $x+2y-4=0$.

4. Найти плоскость, проходящую через точку $(2;2;-2)$ и параллельную плоскости $x-2y-3z=0$.

5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(-1;-1;2)$ и перпендикулярной к плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

6. Через ось Oz провести плоскость, составляющую с плоскостью $2x+y-\sqrt{5}z=0$ угол 60°.

7. Найти расстояние от точки $(5;1;-1)$ до плоскости $x-2y-2z+4=0$.

8. Найти расстояние от точки $(4;3;0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1;3;0)$, $M_2(4;-1;2)$ и $M_3(3;0;1)$.

9. Найти расстояние между параллельными плоскостями $4x+3y-5z-8=0$ и $4x+3y-5z+12=0$.
Указание. Взять на первой плоскости любую точку, например $(2;0;0)$, и найти ее расстояние от другой плоскости.

10. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $A(4;3;0)$ и параллельной вектору $P(-1;1;1)$. Найти след прямой на плоскости yOz и построить прямую.

11. Построить прямую $x=4,\ \ y=3$ и найти ее направляющий вектор.

12. Построить прямую, проходящую через точки $A(2;-1;3)$ и $B(2;3;3)$, и написать ее уравнения.

13. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(-2;1;-1)$ и параллельной вектору $P\{1;-2;3\}$;

14. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $(-4;3;0)$ и параллельной прямой $x-2y+z=4,\ \ 2x+y-z=0.$

15. Найти угол прямой $y=3x-1,\ 2z=-3x+2$ с плоскостью $2x+y+z-4=0.$

16. Найти точку пересечения прямой $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ с плоскостью $x+2y+3z-29=0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1987. – 328 с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. - М.: Наука, 1975. – 272 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. - М.:, Физматлит, 2006. -335 с.
5. Литвин Д.Б.,Мелешко С.В. Линейные системы и операторы. Линии и поверхности второго порядка: учебное пособие. – Ставрополь : Сервисшкола, 2016. – 82 с.